Orbit parametrizations of theta characteristics on hypersurfaces(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Ishitsuka, Yasuhiro

（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏 名	石塚裕大
論文題目	Orbit parametrizations of theta characteristics on hypersurfaces		

（論文内容の要旨）

与えられた平面曲線の定義方程式が線型形式を成分とする対称行列の行列式で書けるとき，その平面曲線は対称行列式表示を持つという．平面曲線の対称行列式表示を求める問題は，19 世紀のヘッセの研究に始まる古典的な問題であり，シータ・キャラクタリスティックと呼ばれる連接層の存在と密接な関係があることが分かっている．ディクソン，ボービルらの研究により，基礎体が標数 0 の代数閉体のときは任意の平面曲線は対称行列式表示を持つ．しかし，一般の体上においては，対称行列式表示を持たない平面曲線も存在する．また，同様の問題は高次元の超曲面に対しても考えることができるが，高次元では超曲面が対称行列式表示を持つのは非常に限られた場合であることが知られている．

石塚氏は，本論文において，任意の体上の幾何的に被約な超曲面上のシータ・キャラクタリスティックを線型形式を成分とする対称行列の線型軌道と結びつける定理を証明した．石塚氏の主定理を述べるために，まず，本論文で扱うシータ・キャラクタリスティックの定義を述べる．k を任意の体とし，$m \geq 2,\ n \geq 1$ を整数とする．$S \subset \mathbb{P}^m$ を k 上の幾何的に被約な超曲面とし，その次数は $n+1$ とする．S 上の連接層 $\mathcal{M}$ がシータ・キャラクタリスティックとは，算術的コーエン・マコーレーかつ純次元 $m-1$ で，S の各既約成分の生成点における長さが 1 であり，連接層の同型

$$\lambda\colon \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_S(\mathcal{M}(2-m), \omega_S)$$

を持つことをいう．ここで，ω_S は S の標準層である．大域切断の空間 $H^0(S,\mathcal{M})$ の次元が 0 のとき，$\mathcal{M}$ を非効果的という．以下が本論文の主定理である．

定理 1　以下の 2 つの集合の間に自然な全単射が存在する．

- $m+1$ 変数 $X_0, X_1, \ldots, X_m$ の線型形式を成分に持つ $n+1$ 次対称行列 M で $S = (\det(M) = 0)$ を満たすものの，作用 $M \cdot (a,P) = a\,{}^tPMP$ に関する軌道．ここで，(a,P) は $k^\times \times \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ の元を動く．
- 組 $(\mathcal{M},\lambda)$ の同値類．$\mathcal{M}$ は S 上の非効果的シータ・キャラクタリスティックで $\dim H^0(S,\mathcal{M}(1)) = n+1$ を満たすもの．λ は上述の連接層の同型．組 $(\mathcal{M},\lambda), (\mathcal{M}',\lambda')$ が同値とは，連接層の同型 $\rho\colon \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}'$ と $u \in k^\times$ であって，${}^t\rho \circ \lambda' \circ \rho = u\lambda$ を満たすものが存在することをいう．

なお，本論文では，S が幾何的に被約ではない超曲面の場合も対応する全単射を構成しているが，ここでは省略する．

定理 1 より，与えられた超曲面 S の対称行列式表示を求めるには，まず S 上の非効果的シータ・キャラクタリスティックを記述し，そしてその上に定まる同型 λ を記述すればよいことが分かる．前者は平面曲線などの場合を除き一般には難しい問題と思われるが，後者については石塚氏は次の定理を証明した．

定理 2　$S, \mathcal{M}$ を定理 1 の通りとし，k 上有限次元の代数を $L := \mathrm{End}_S(\mathcal{M})$ で定める．このとき L は可換エタール k-代数で，$\mathcal{M}$ 上の組 $(\mathcal{M}, \lambda)$ の同値類の集合は群 $L^\times/k^\times L^{\times 2}$ による単純推移的作用を持つ．

特に，k が代数閉体であるか，または S が幾何的に整の場合は，群 $L^\times/k^\times L^{\times 2}$ が自明群になり，線型形式を成分に持つ対称行列で S の対称行列式表示を与えるものの $k^\times \times \mathrm{GL}_{n+1}(k)$-軌道が，$S$ 上の非効果的シータ・キャラクタリスティックの同型類と一対一に対応することが従う．これは，ボービル，ホーらによる平面曲線の対称行列式表示に関する先行研究結果を含むものである．なお，一般には，$L^\times/k^\times L^{\times 2}$ が無限群になる場合もある．この場合は，対称行列 M の k の代数閉包上で考えた軌道が，k 上で無限個の軌道に分裂することが分かる．

さらに，石塚氏は，定理 1・定理 2 の証明に用いられた手法の応用として，二次超曲面の完全交叉の射影自己同型群の構造に関する結果も得ている．k を標数が 2 でない体とし，$n > m \geq 2$ を整数とする．$Q_0, Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathbb{P}^n$ を k 上の二次超曲面とする．$X_Q := Q_0 \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_m$ は完全交叉であると仮定する．また，$M_0, M_1, \ldots, M_m$ をそれぞれ $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ に対応する $n+1$ 次対称行列とし，$M := X_0 M_0 + X_1 M_1 + \cdots + X_m M_m$ とおく．$\det(M) = 0$ が幾何的に被約な超曲面 $S \subset \mathbb{P}^m$ を定めると仮定する．定理 1 において対称行列 M に対応する組 $(\mathcal{M}, \lambda)$ をとる．$S \subset \mathbb{P}^m$ の射影自己同型群の元 ν のうち，$(\nu^*\mathcal{M}, \nu^*\lambda)$ が $(\mathcal{M}, \lambda)$ と同値になるものを集めた部分群を P とおく．群準同型 $L^\times/k^\times \longrightarrow L^\times/k^\times$, $x \mapsto x^2$ の核を N とおく．

定理 3　二次超曲面の完全交叉 $X_Q \subset \mathbb{P}^n$ の射影自己同型群 G は，次の短完全系列を持つ．

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow 1$$

この定理は，標数が 2 でない代数閉体上の 3 個の二次超曲面の滑らかな完全交叉の射影自己同型群に関するボービルの結果の一般化である．

以上が本論文の主要結果である．

（論文審査の結果の要旨）

石塚氏の研究分野は代数幾何と整数論の境界領域である．代数幾何においては，様々な代数群の線型表現の軌道と幾何的対象の対応が深く研究されている．古くは 3 次曲線や 4 次曲線の定義方程式に関する 19 世紀のヘッセの研究に遡る．また，最近では，整数論への応用を目的として，体上の線型表現の軌道をある種の代数構造やセルマー群などの整数論的対象と結びつける研究がバルガバ氏，グロス氏らを中心とする研究グループにより進められており，数論的不変式論と呼ばれている．

こうした状況を踏まえて，本論文において，石塚氏は，線型形式を成分に持つ対称行列の空間の線型軌道の幾何的解釈の研究を行った．$S \subset \mathbb{P}^m$ を体 k 上の幾何的に被約な超曲面とし，$m+1$ 変数 $X_0, X_1, \ldots, X_m$ の線型形式を成分に持つ $n+1$ 次対称行列 M であって，$\det(M) = 0$ が S を定めるものを考える．このとき，S 上のシータ・キャラクタリスティックと呼ばれる連接層 $\mathcal{M}$ と，ある種の同型 λ を定めることができる．石塚氏は，線型形式を成分に持つ対称行列 M の $k^\times \times \mathrm{GL}_{n+1}(k)$-軌道が，組 $(\mathcal{M}, \lambda)$ の同値類と一対一に対応することを証明した．また，それぞれの $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ 上に定まる組 $(\mathcal{M}, \lambda)$ の同値類の集合に，ある群 $L^\times / k^\times L^{\times 2}$ が単純推移的に作用することを示した．さらに，標数が 2 でない体上において，二次超曲面の完全交叉の射影自己同型群と 3 つ組 $(S, \mathcal{M}, \lambda)$ の射影自己同型群を結びつける短完全系列を構成した．

これらの結果は，任意の体上における任意次元の幾何的に被約な超曲面に対して成立する一般的なものである．すでに知られていたボービル，ホーらによる平面曲線の対称行列式表示に関する先行研究結果を含み，超曲面の対称行列式表示という古典的研究対象に対して新しい知見を与えるものである．基礎体として代数体や有限体，局所体などの整数論的な体をとることで，将来は整数論への応用も期待される．また，二次超曲面の完全交叉の射影自己同型群の記述は，代数幾何におけるモジュライ理論などへの応用も見込まれる．今後もさらなる進展が期待できる，学術的価値の大きい結果である．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について平成２７年１月２７日に試問を行った結果，全調査委員の一致で合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月